数理解析研究所講究録
121巻 1971年 31-42

定数係数偏微分方程式に対するLiouville Typeの定理

東大理　村田　実

§1. 序

関数論でよく知られたLiouvilleの定理は, Real Analysisの立場からは次の様にとらえられる.

方程式; $\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y)=0$, in $\mathbb{R}^2$

の解であって,

$$u(x,y)=o(1) \quad \text{as} \quad \sqrt{x^2+y^2}\to\infty$$

なるものは恒等的に0でなければならない.

ここで微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$ に対応する特性多項式 $P(\xi)=i\xi_1-\xi_2$ の実零点が原点のみであることに注意しよう.

一方、$\Delta+1$. の特性多項式. $-(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)+1$ の実零点は $(n-1)$ dim manifold をなし.

$(\Delta+1)u=0$ in $\mathbb{R}^n$ の解;

$$u(x)=\int_{S^{n-1}}e^{ix\cdot\omega}d\omega=\int e^{i|x|\omega_n}d\omega$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{|\xi|}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \cdot J_{\frac{n-2}{2}}(|x|)$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{|\xi|}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \cos\left(|x| - (n-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right) + O\left(|x|^{-\frac{n+1}{2}}\right) \quad \text{as } x\to\infty$$

は、$x\to\infty$ のとき $|x|^{-\frac{n-1}{2}}$ の order で一様に減衰することに注意すれば、次の命題が予測できるのではなかろうか。すなわち、

方程式； $P(D)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$

の解が $x\to\infty$ のとき、どの程度まで減衰しうるのかは、$P(\xi)$ の実零点の幾何学的性質によって決定される。

我々は §2 において、この問題の部分的解答を与える。§3 では考える領域を全空間から外部領域に変えたとき、事情はどの様に変わるかを見る。この時、実零点が $(n-1)$ dim manifold をなす $\Delta+1$ については全空間の場合と同じく、$O(|x|^{-\frac{n-1}{2}})$ 以上の減衰を示す解は現われないが、実零点が退化した Δ、$\square$、$\Delta+i$、等の場合、非常に速い減衰を示す解が現われるのが特徴的である。

記号　$P(D)$：定数係数偏微分作用素，$D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$，$P(\xi) \neq$ const

$V(P) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \ ; \ P(\xi) = 0 \}$

Ω ; $\mathbb{R}^n$ の外部領域（i.e 連結開集合で，Ω^c が有界）

$u(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ が distribution sense で，方程式

$P(D)u = 0 \ \text{in} \ \Omega$ をみたすとき，

"$P(D)u = 0 \ \text{in} \ \Omega$" と略記する。

$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u = (2\pi)^{-n} \int u(x) e^{-ix\xi} d\xi \quad \text{in} \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

§2. $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合.

次の状況を設定する.

$V(P) = \bigcup_{j=0}^{n-1} M^j$ ，　$M^i \cap M^j = \text{finite set} \quad i \neq j$

M^j は j-dim manifold or 空集合

$P(\xi)$ は M^j $(j=1, \cdots, n-1)$ 上単純，すなわち.

- $\text{grad}\, P \neq 0 \quad \text{on} \ M^{n-1}$
- $\text{grad}\, \mathrm{Re}\, P \not\parallel \text{grad}\, \mathrm{Im}\, P \quad \text{on} \ M^{n-2}$
- $\dfrac{\partial P}{\partial n_\mu}(\xi) = 0 \qquad \mu = 1, \cdots, n-j$

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^2 P}{(\partial n)^\alpha}(\xi) \cdot \frac{y^\alpha}{\alpha!} \neq 0 \quad \text{for} \ \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-j}$$

$$\text{on} \ M^j \quad (1 \leq j \leq n-3)$$

ここで $\{n_\mu\}_{\mu=1 \cdots n-j}$ は M^j の normal vector

（もちろん この条件は regular point においてのみ課す
ものとする）

その時 $V(P)$ によって決まる数 $h \leqq 0$ と、cone K_δ を用いて次の評価が成り立つ。

定理A $P(D)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$

$u(x) = O(|x|^\nu)$ for some ν, unif in $\mathbb{R}^n$

$u(x) = o(|x|^h)$ unif in some K_δ

ならば $u \equiv 0$

cone K_δ の定義：

$$S^{n-1} \supset N \equiv \bigcup_{j=1}^{n-1} N(M^j) = \bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{\xi \in M^j} \left(T_\xi^\perp(M^j) - 0 \big/ \mathbb{R}^+\right)$$

$$N_\delta = \{ \omega \in S^{n-1} ; \operatorname{dis}(\omega, N) \leqq \delta \}$$

$$K_\delta = \{ r\omega : \omega \in N_\delta, r \geqq 0 \}$$

h の定義

$k_{n-1} = \min\limits_{\xi \in M^{n-1}}$ {ξ における M^{n-1} の主曲率で 0 でないものの個数}

$k_j = \min\limits_{\xi \in M^j} \min\limits_{n \in T_\xi^\perp}$ {ξ における normal vector n と、$T_\xi(M^j)$ の張る $(j+1)$ dim space $\mathcal{L}$ への M^j の射影 $(M^j)_n$ を $\mathcal{L}$ の中の超曲面と考えたときの non-zero な主曲率の個数}, $1 \leq j \leq n-2$

$$h = \min\left\{ \frac{k_{n-1}}{2} - (n-1), \frac{k_{n-2}}{2} - (n-2), \frac{k_{n-3}}{2} - (n-3+1), \cdots, \frac{k_j}{2} - (j+1), \cdots, \frac{k_1}{2} - 2 \right\}$$

但し { } の中で意味のない項は 0 と読みかえることとする

特に $V(P)=M^0=$ 有限集合、の場合は $N=S^{n-1}$, $h=0$ とする。

(定理の証明の方針) Littman [4] と同様に、

$P(D)v=w\in\mathcal{F}^{-1}(C_0^\infty)=\{w\in\mathcal{S}:\hat{w}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$

の解 $v(x)=\int e^{ix\xi}\hat{w}(\xi)/P(\xi)\,d\xi$ の $x\to\infty$ における漸近行動を調べる方法による。

<u>例</u> 1. $P(D)=\Delta+1$, $(\Delta+1)(\Delta+i)$

$N=S^{n-1}$, $h=-\frac{n-1}{2}$

2. $P(D)=\Box-1$

$N=\{\omega\in S^{n-1},\ |\omega_n|\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $h=-\frac{n-1}{2}$

3. $P(D)=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$

$N=S^{n-1}$, $h=-\frac{n-1}{2}$

4. $P(D)=\Box$

$N=\{\omega\in S^{n-1};\ |\omega_n|=\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $h=-\frac{n}{2}$

5. $P(\xi)=(\xi_1^2+\xi_2^2-1)+i(\xi_3^2+\xi_4)$

$N=S^{n-1}$, $h=\frac{1}{2}-(4-2)=-\frac{3}{2}$

6. $P(\xi)=(\xi_2+\xi_1)^2+\sum_{j=3}^{n}\xi_j^2$, $n\geqq 4$

$N=\{\omega\in S^{n-1};\ \omega_1=\omega_2\}$, $h=-2$

7. $P(\xi) = (i\xi_1 - \xi_2)(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)$

$N = S^{n-1}$, $h = -1$

8. $P(\xi) =$ homogeneous elliptic poly, $i\xi_n + \xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2$

$N = S^{n-1}$, $h = 0$

注意 例2,3. では cone K_δ を"半分"に減らすことができる。すなわち.

例2′. $N_\varepsilon = \{\omega_n \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\}$ or $\{\omega_n \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\}$

$K_\varepsilon = \{r\omega\ ;\ r \geqq 0,\ \omega \in N_\varepsilon\}$

としたとき、

$$(*)\quad \begin{cases} P(D)u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u(x) = O(|x|^\nu) & \text{for some } \nu, \text{ unif in } \mathbb{R}^n \\ u(x) = o\left(|x|^{-\frac{n-1}{2}}\right) & \text{unif in } \underline{\text{each}}\ K_\varepsilon \end{cases}$$

ならば $u \equiv 0$

例3′, $N_\varepsilon = \{\omega_n > \varepsilon\}$ or $\{\omega_n < -\varepsilon\}$

としたとき $(*)$ が成立.

(詳しくは Littman [5] を参照せよ)

§3. Ω = 外部領域の場合.

定理 B.I i) $P(\xi)$ の各既約成分は $(n-1)$ dim manifold をなし. grad $P \neq 0$ on $V(P)$.

$$\min_{\xi \in V(P)} \{ \xi \text{ における } V(P) \text{ の non zero な主曲率の個数} \} = k$$

ii) Ω^c が凸，又は $P(\xi)$ が elliptic

なる仮定のもとで，

$P(D)u = 0$ in Ω

$u(x) = O(|x|^{\nu})$ for some ν, unif in Ω

$u(x) = o(|x|^{\frac{k}{2}-(n-1)})$ unif in $K_\delta \cap \Omega$

ならば $u \equiv 0$ in Ω

<u>定理 B.II</u> i) $P(\xi)$ の各既約成分が全て実零点をもつ，

ii) Ω^c が凸，又は $P(\xi)$ が elliptic

なる仮定のもとで，

$P(D)u = 0$ in Ω

$D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\forall |\alpha| \leq m$

$D^\alpha u = O(|x|^{-\nu})$ unif in Ω, $\forall \nu$, $\forall |\alpha| \leq m$

ならば $u \equiv 0$ in Ω

（ここで m は次の様な整数である．
$P(\xi) = \prod_{j=1}^{\mu} P_j(\xi)$ と素因数分解したとき
$m = \min_j \{ \deg P/P_j \}$）

定理 B.III ii) Ω^c が凸，又は $P(\xi)$ が elliptic なる仮定のもとで．

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = O(e^{-\nu|x|}) \quad {}^\forall \nu, \quad \text{unif in } \mathbb{R}^n$$

ならば $u \equiv 0$ in Ω

（定理 BI〜BIII の証明）

${}^\forall \varepsilon > 0$ fix

$$(\Omega^c)_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ \mathrm{dis}(x, \Omega^c) \leqq \varepsilon \}$$

$$\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \notin (\Omega^c)_\varepsilon \\ 0 & x \in (\Omega^c)_{\varepsilon/2} \end{cases}$$

$$U_\varepsilon(x) = \begin{cases} \chi_\varepsilon \cdot u, & \text{in } \Omega \\ 0, & \text{in } \Omega^c \end{cases}$$

としたとき

$U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が言えればよい．${}^\forall \varepsilon > 0$

$\because$ $P(\xi)$ が elliptic ならば u の analiticity により直ちに $u \equiv 0$．が従う．

Ω^c が凸ならば．

$$\text{Convex hull}(\mathrm{Supp}\, U_\varepsilon) = \text{Convex hull}(\mathrm{Supp}\, P(D)U_\varepsilon)$$

$$\subset (\Omega^c)_\varepsilon, \quad \text{for } {}^\forall \varepsilon$$

であるから，$u \equiv 0$．

$U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ の証明

(B.I) U_ε は u と全く同じorderの減衰を示すから、Littmann の定理（補注参照）により $U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

(B.II) $U_\varepsilon(x) = O(|x|^{-\nu})$ in $\mathbb{R}^n$, $\forall \nu$

であるから、Trèves [6] と全く同様の議論をすることにより $U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が従う。

(B.III) $U_\varepsilon(x) = O(e^{-\nu|x|})$ in $\mathbb{R}^n$ $\forall \nu$

であるから、$\hat{U}_\varepsilon(\xi)$ は entire function として $\mathbb{C}^n$ 全体に拡張され、しかも、

$$P(\zeta)\,\widehat{U_\varepsilon}(\zeta) = \hat{f}(\zeta), \quad f = P(D)U_\varepsilon \in \mathcal{E}'$$

であるから、Malgrange の lemma により、$U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が従う。

定理 B.I ～ B.III に対する若干の考察

1. $P(\xi)$ の素因数の中に $\Delta + 4i$ の様な実零点をもたない因子が存在すると B.I, B.II の結論はたちまち破れてしまう。例えば、

$$P(D) = (\Delta+1)(\Delta+4i)$$

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1 \}$$

$$v(x) = \int \frac{e^{ix\xi}\,\hat{w}(\xi)}{-|\xi|^2 + 4i}\, d\xi, \quad w \in C_0^\infty(|x|<1)$$

例

$u(x) = v|_{\Omega}$ とおけば、

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega$$
$$u(x) = O(e^{-|x|}) \quad \text{in } \Omega$$

ではあるが、$u \not\equiv 0$.

(全空間では、$^\forall P(\xi)$ に対して、
$P(D)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, $u(x) = O(|x|^{-\frac{n+\varepsilon}{2}})$ ならば $u \equiv 0$
なることに注意せよ。)

2. 穴をあけるという Perturbation に対して安定なのは、codim $V(P) = 1$ なる時だけである。

例えば codim $V(P) = 2$ なる $P(\xi) = i\xi_1 - \xi_2$ in $\mathbb{R}^3$ を $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 ;\ |x| > 1\}$ で考えてみよう。

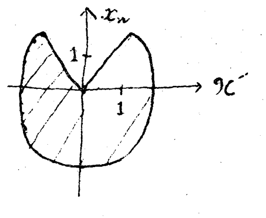
$$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$$
$$u(x) = \rho(x_3)\left(\frac{1}{x_1 + i x_2}\right)^{\nu} \quad \text{in } \Omega$$

とすると

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega$$
$$u(x) = O(|x|^{-\nu})$$

ではあるが $u \not\equiv 0$

3 条件 (ii) をおとすと有界な Support をもつ解が現われうる。

① $\Omega^c =$ 

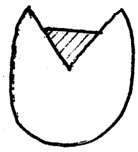
, $P(D)$ は $x_n = 0$ を characteristic plane としてもつ。

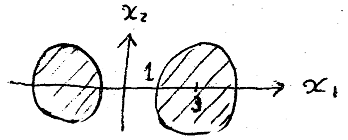
$f(x)$: 半空間 $\{x \in \mathbb{R}^n ;\ x_n \leqq 1\}$ に Support をもつ

P(D) の null solution

$$u(x) = \begin{cases} f(x) & : \ x \in \Omega \cap \{|x| \leqq 1\} \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると、

$P(D)u = 0$ in Ω , Supp u = 

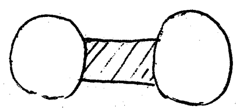
② Ω^c = 

, $P(\xi)$ は $x_2 = 0$ を characteristic line としてもつ, homogeneous polynomial.

$f(t) \in C_0^\infty \{t \in \mathbb{R}^1 ;\ |t| < 1\}$

$$u(x) = \begin{cases} f(x_2) & ; \ \text{in } \Omega \cap \{|x_1| < 3\} \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると、

$P(D)u = 0$ in Ω , Supp u = 

補注 (W. Littman [4])

$P(\xi)$ が定理 B.I. の条件 (i) を満たすという仮定のもとで、

$P(D)u = f$ in $\mathbb{R}^n$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$u(x) = o\left(|x|^{\frac{k}{2}-(n-1)}\right)$ unif in $\mathbb{R}^n$

ならば $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

参考文献

[1] В. В. Грушин. Об условия типа Зомерфельда М. Сб. Т. 61 (103) '63

[2] T. Kato. Growth properties of sol. of the reduced wave eq. with var. coeff. C.P.M. '53

[3] W. Littman, Fourier transform of surface carried measures. Bull. A.M.S. '63

[4] 〃, Decay at infinity of sol of P.P.E with const coeff. Trans. A.M.S. '66

[5] 〃 Maximal rates of decay of sol of P.D.E. Arch. R.M. '70

[6] F. Trèves. Diff polynomials and decay at infinity Bull. A.M.S. '60

[7] L. Schwartz. Téorie des Distributions nouvelle édition '66

[8] Г. Е. Шилов. Аналог одной теоремы Лорана Шварца. Изв. Вис. Учебных Завед. '61

[9] K. Yosida A theorem of Liouville Type for Meson. eq. Proc. J.A. '51

[10] Б. Р. Ваинберг Принципы излучения. У.М.Н. '66.